Nullstellen einer quadratischen Funktion bestimmen

Da die y-Koordinate eines Schnittpunktes mit der x-Achse immer Null ist, lautet der Ansatz zur Berechnung einer Nullstelle: $f(x) = 0$.

Der Graph einer quadratischen Funktion besitzt **entweder keine, eine oder maximal zwei** Nullstellen.

Nach der Gestalt der quadratischen Funktion lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

1. $f(x) = ax^2$
2. $f(x) = ax^2 + c$
3. $f(x) = a(x - d)^2 + e$
4. $f(x) = ax^2 + bx$
5. $f(x) = ax^2 + bx + c$
6. $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

1. Fall: $f(x) = ax^2$

Funktionen vom Typ $f(x) = ax^2$ besitzen als einzige Nullstelle die Null.

Beispiele

$$f(x) = -4x^2 \Rightarrow f(x) = -4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$f(x) = -2x^2 \Rightarrow f(x) = -2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$f(x) = 0{,}5x^2 \Rightarrow f(x) = 0{,}5x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

2. Fall: $f(x) = ax^2 + c$

Vorgehensweise

1. Gleichung nach x^2 auflösen
2. Wurzel ziehen

Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 18 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2x^2 - 18 = 0$

1.) Gleichung nach x^2 auflösen

$$2x^2 - 18 = 0 \quad | + 18$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2 = +18 \quad |: 2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 = 9$$

2.) Wurzel ziehen

$$x^2 = 9 \quad |\sqrt{}$$
$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = -3 \; und \; x_2 = 3$$

3. Fall: $f(x) = a(x-d)^2 + e$

Vorgehensweise

1. Gleichung mit Äquivalenzumformungen auf die Form $(x-d)^2 = -\frac{e}{a}$ bringen
2. Wurzel ziehen
3. Gleichung nach x auflösen.

Beispiel: $f(x) = 2(x-4)^2 - 18 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2(x-4)^2 - 18 = 0$

1.) Gleichung mit Äquivalenzumformungen auf die Form $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d})^2 = -\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{a}}$ bringen

$$2(x-4)^2 - 18 = 0 \quad | + 18$$
$$\Rightarrow \quad 2(x-4)^2 = +18 \;\; |: 2$$
$$\Rightarrow \quad (x-4)^2 = 9$$

2.) Wurzel ziehen

$$(x-4)^2 = 9 \quad |\sqrt{}$$
$$\Rightarrow \quad x - 4 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

3.) Gleichung nach $\boldsymbol{x}$ auflösen

$$x - 4 = \pm 3 \quad | + 4$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 1 \; und \; x_2 = 7$$

4. Fall: $f(x) = ax^2 + bx$

Vorgehensweise

1. x ausklammern
2. Faktoren gleich Null setzen (Produkt-gleich-Null-Regel)

Beispiel: $f(x) = -2x^2 + 4x \quad \Rightarrow \quad f(x) = -2x^2 + 4x = 0$

1.) x ausklammern

$$x \cdot (-2x + 4) = 0$$

2.) Faktoren gleich Null setzen

1. Faktor: $x = 0 \;\Rightarrow x_1 = 0$

2. Faktor: $-2x + 4 = 0| - 4$
$\Rightarrow \quad -2x = -4|: (-2)$
$\Rightarrow x_2 = 2$

5. Fall: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Vorgehensweise (Quadratische Ergänzung):

1. Durch den Faktor vor x^2 teilen
2. Quadratisch ergänzen
3. Nach $(\quad)^2$ auflösen und die Wurzel ziehen

Beispiel: $f(x) = 2x^2 + 8x - 24 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2x^2 + 8x - 24 = 0$

1.) Durch den Faktor vor x^2 teilen

$$2x^2 + 8x - 24 = 0 \quad |:2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + 4x - 12 = 0$$

2.) Quadratisch ergänzen

$$x^2 + 4x + \mathbf{4} - \mathbf{4} - 12 = 0$$
$$\Rightarrow (x+2)^2 - 4 - 12 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x+2)^2 - 16 = 0$$

3.) Nach $(\quad)^2$ auflösen und die Wurzel ziehen

$$(x+2)^2 - 16 = 0 \quad |+16$$
$$\Rightarrow \quad (x+2)^2 = +16$$
$$(x+2)^2 = +16 \quad \left|\sqrt{}\right.$$
$$\Rightarrow \quad x + 2 = \pm 4$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 2 \; oder \; x_2 = -6$$

6. Fall: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Vorgehensweise (Produkt-Null-Regel):

In diesem Fall hat man ein Produkt aus drei Faktoren. Damit ein Produkt Null ergibt, muss mindestens einer der Faktoren Null gewesen sein, deshalb betrachtet man die Faktoren einzeln und prüft, wann der Faktor Null wird.

Beispiel 1: $f(x) = 2(x-5)(x+8) \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2(x-5)(x+8) = 0$

1. Faktor: 2 → Kann nicht Null werden.

2. Faktor: $(x-5) = 0 \Rightarrow$ wird Null, wenn $x = 5$ $\Rightarrow$ die Funktion hat eine Nullstelle bei $x_1 = 5$

3. Faktor: $(x+8) = 0 \Rightarrow$ wird Null, wenn $x = -8$ $\Rightarrow$ die Funktion hat eine Nullstelle bei $x_2 = -8$

Beispiel 1: $f(x) = 2(3x-3)(2x+8) \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2(3x-3)(2x+8) = 0$

1. Faktor: 2 → Kann nicht Null werden.

2. Faktor: $(3x-3) = 0 \Rightarrow$ wird Null, wenn $x = 1$ $\Rightarrow$ die Funktion hat eine Nullstelle bei $x_1 = 1$

3. Faktor: $(2x+8) = 0 \Rightarrow$ wird Null, wenn $x = -4$ $\Rightarrow$ die Funktion hat eine Nullstelle bei $x_2 = -4$