Potenzen mit negativem und rationalem Exponenten

Auf Dauer hat es die Mathematiker nicht zufrieden gestellt, nur mit Potenzen mit natürlichem Exponenten zu rechnen. Denn es ließ sich z.B. keine Exponentialfunktion – also eine Funktion der Form $f(x) = 2^x$ – sinnvoll betrachten, da sie als Graph nur aus einzelnen Punkten bestand.

Ziel der Mathematiker war es, dass die Potenzsätze, mit denen sie ja gute Erfahrungen gemacht hatten, weiterhin Gültigkeit behielten.
So fingen sie an zu rechnen:
$\frac{x^3}{x^5} = x^{3-5} = x^{-2}$ nach dem Potenzsatz zum Dividieren von Potenzen.

Andererseits gilt $\frac{x^3}{x^5} = \frac{x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x \cdot x} = \frac{1}{x^2}$ nach der Definition von Potenzen mit natürlichem Exponenten und dem Kürzen von Brüchen.

Insgesamt erhielten sie $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$.

Dies motivierte sie zu folgender

Definition: Für jede natürliche Zahl n wird $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ festgelegt.

Damit war jede Potenz mit negativem ganzzahligem Exponenten definiert. $x = 0$ konnte man dann allerdings nicht mehr als Basis zulassen, damit man nicht durch Null dividiert.

Für den Spezialfall x^0 sind die Mathematiker ganz ähnlich vorgegangen:
$\frac{x^3}{x^3} = x^{3-3} = x^0$. Andererseits gilt für $x \neq 0$ $\frac{x^3}{x^3} = \frac{x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{1} = 1$.

Definition: Für alle reellen Zahlen ungleich Null wird $x^0 = 1$ festgelegt.

.

Anmerkung: 0^0 ist nicht definierbar.

Ähnlich gingen die Mathematiker auch beim rationalen Exponenten vor:
$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = x^{\frac{1}{3} \cdot 3} = x^1 = x$ nach dem Potenzsatz zum Potenzieren von Potenzen.
Andererseits wussten sie schon lange, dass das Wurzelziehen die Umkehrung des Potenzierens ist, also dass z.B. $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$ gilt.

Damit drängten sich folgende **Definitionen** auf:

$\boxed{x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}}$ und $\boxed{x^{\frac{a}{n}} = \sqrt[n]{x^a}}$

Da der Radikand (die Zahl unter einer Wurzel) niemals negativ sein darf, durften ab dann keine negativen Zahlen mehr als Basis betrachtet werden.

Übrigens: Den Mathematikern ist es sogar gelungen, reelle Zahlen als Exponenten zu nehmen, ohne dass Abstriche bei den Potenzsätzen gemacht werden mussten.